Undervisning och studier i matematik med hjälp av datorprogrammet Graphmatica

Thomas Lingefjärd

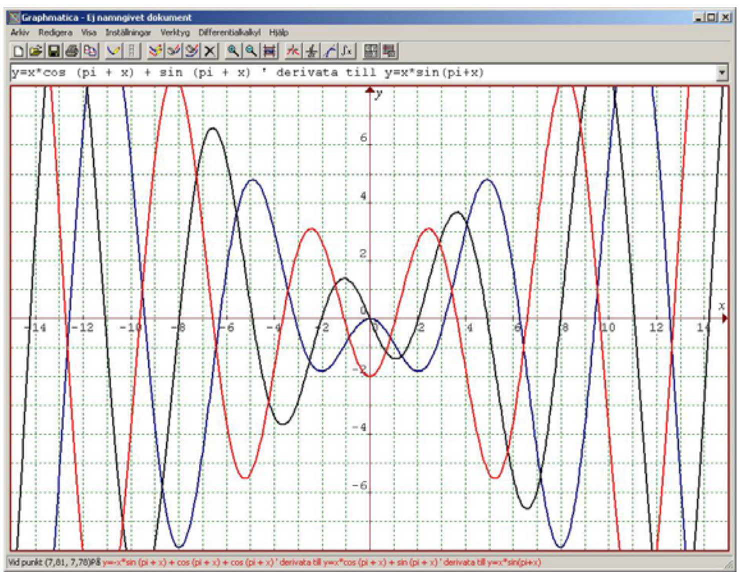
Göteborg 2009

Kort om Graphmatica

Graphmatica har funnits ganska länge och det finns många andra datorprogram som kan rita grafer och genomföra många av de visuella redovisningar som Graphmatica kan. Anledningen till att använda Graphmatica bör vara att du vill rita något, inte att du vill beräkna något. I så fall är Maxima ett betydligt bättre val. Men vill du rita grafer till enkla eller till komplicerade funktioner, i rektangulär eller i parameterform, vill du visualisera olikheter eller om du vill rita riktningsfält för differentialekvationer, ja då är Graphmatica ett smidigt verktyg. Dessutom kan man anpassa kurvor till punkter, så kallad regressionsanalys. Du hittar en svensk version på **http://www.graphmatica.com**

Detta är en kort introduktion till datorprogrammet Graphmatica som jag själv har översatt till svenska. Jag har även översatt GeoGebra och en gymnasieversion av Maxima till svenska, så jag har en viss överblick över vad dessa program kan utföra. Testa gärna olika sätt att använda Graphmatica i din undervisning eller i dina studier, men glöm inte att skicka 25 USD till Keith Hertzer om du använder programmet mer än en månad. Skriv till Keith på adress **ksoft@graphmatica.com** för detaljer.

När man startar Graphmatica får man ett så kallat grafiskt dokument, bestående av ett koordinatsystem med en kommandorad överst. Där skriver man in sin funktion $y = f(x)$, exempelvis $y = x$* sin(pi + x) och trycker på Enter. Kurvan ritas upp. Om du klickar med höger musknapp på kurvan, så kan du få derivatan uppritad direkt. Alla uppritade kurvor har en algebraisk beskrivning under rullisten till kommandoraden. En stor fördel med Graphmatica är att varje ny kurva ritas med annan färg. Se figur 1.



Figur 1: Graphmatica ritar grafen till $y = x \cdot \sin(\pi + x)$ samt första och andra derivatan.

Alla standardfunktioner och en hel del icke-standard funktioner kan ritas i Graphmatica, och Graphmatica är förvånansvärt duktigt på att ta fram derivatan till olika funktionsuttryck lika lätt som programmet klarar derivatan till funktionen $y = x \cdot \sin(\pi + x)$ ovan. Testa gärna Graphmaticas förmåga att bestämma derivata genom att mata in följande funktionsuttryck på kommandoraden och högerklicka på kurvan.
Exempel:

$$y = \frac{\sin(x)}{x}, \; y = x \cdot e^{2x}, \; y = x^x$$

Funktioner

Graphmatica har ett antal standardfunktioner. Notationen liknar den man har på miniräknare.

Kommandot abs(x) ger absolutbeloppet |x|.

sqrt(x) ger kvadratroten av x, $\sqrt{x}$.

exp(x) ger exponentialfunktionen e^x.

ln(x) ger naturliga logaritmen ln(x); log(x) ger logaritm med bas 10 log(x).

sin(x) ger sin(x) där x antingen är en vinkel i grader eller i radianer.

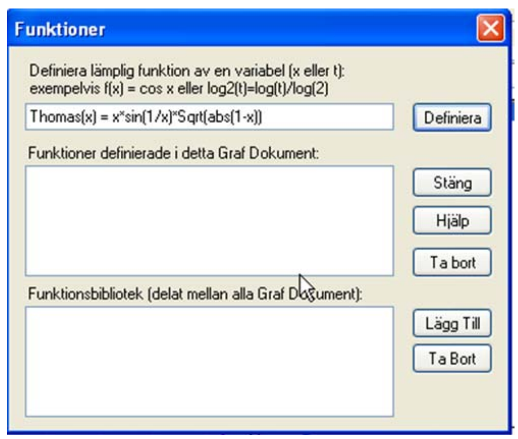
cos(x) ger cos(x) där x antingen är en vinkel i grader eller i radianer.

tan(x) ger tan(x) där x antingen är en vinkel i grader eller i radianer.

cot(x) ger cot(x) där x antingen är en vinkel i grader eller i radianer.

asin(x) ger arcsin(x); acos(x) ger arccos(x); atan(x) ger arctan(x).

Utöver dessa funktioner finns även andra som är mindre vanliga i svensk gymnasieskola. Jag återkommer till en del av dessa funktioner i de följande avsnitten. Du kan också definiera dina egna funktioner under menyalternativet Verktyg – Funktioner. Se figur 2.



Figur 2: Definition av egen funktion i Graphmatica.

Variabler

x, y	rektangulära (kartesianska) koordinater
r, t	r och θ i polära koordinater
x, y, t	x och y som funktioner av t i parametrisk form
t, x, dx	diff-ekv mode, löser första ordningen ODE.
	Observera att dx är dx/dt i dx/dt = $f(x, t)$
x, y, dy	alternativ notation
d2x, d3x...	eller högre ordning av ODEs
t, x, y, z, w, dx...dw	system av ODEs
t, x1...x4, dx1...dx4	alternativ notation
a, b, c, j, k	fria variabler som användaren kan bestämma värdet på

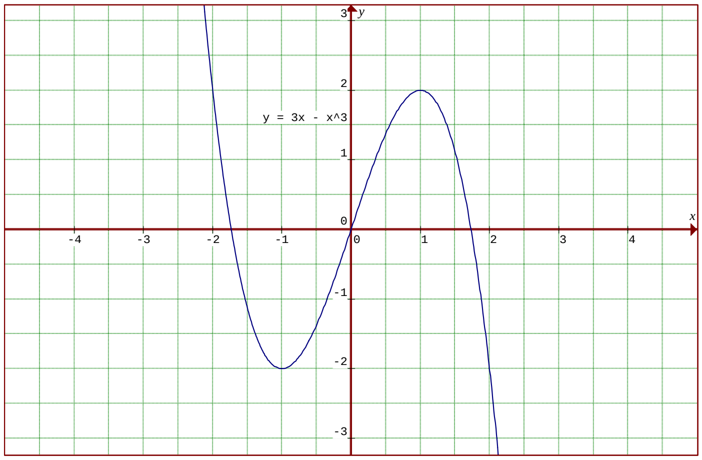
Konstanter

d	konverterar grader till radianer = $\pi/180$
e	Eulers konstant = 2.718...
pi (eller p)	π = 3.14159...

Notera: Vid uppstart av Graphmatica arbetar alla trigonometriska funktioner i radianer. Du kan konvertera genom att använda konstanten d: sin (45d) = sin (π/4) eller cos (x·d) = cosinus av x, i grader.

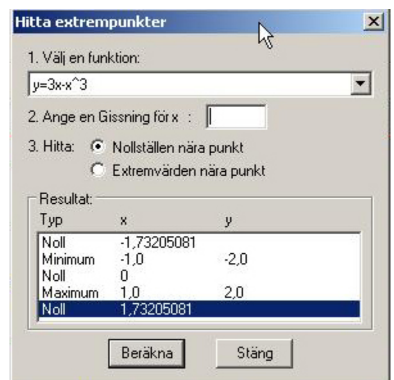
Extremvärden och skärningspunkter

Förutom derivering, så kan Graphmatica också bestämma extrempunkter för funktioner som du har ritat i ditt Grafiska dokument. Låt oss börja med att studera funktionen $f(x) = 3x - x^3$. Observera att jag har lagt till en kommentar med funktionens algebraiska definition.



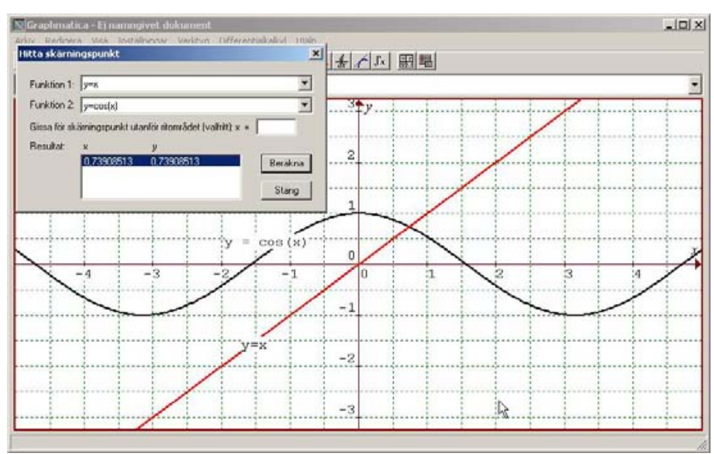
Figur 3: Funktionen $f(x) = 3x - x^3$ uppritad i Graphmatica.

Vi ser i figur 3 att funktionen har två extrempunkter och tre reella nollställen. Under menyalternativet Differentialkalkyl, hittar du verktyget Bestäm Extrempunkter…. Verktyget hittar omedelbart tre nollställen och ett minimum och ett maximum. Se figur 4.



Figur 4: Extrempunkter till funktionen $f(x) = 3x - x^3$ hittas lätt av Graphmatica.

Graphmatica har också ett verktyg för att bestämma skärningspunkter, det finner du under menyalternativet Verktyg. Vi skall använda det för att lösa ekvationen $\cos(x) = x$ och vi börjar med att rita upp $y = \cos(x)$ och $y = x$ i samma grafiska dokument och aktiverar verktyget



Som vi ser, så har Graphmatica inget problem med att bestämma lösningen till ekvationen $\cos(x) = x$. Se figur 5.

Använd nu dessa verktyg och:

Bestäm extrempunkter till funktionen $f(x) = x^x$

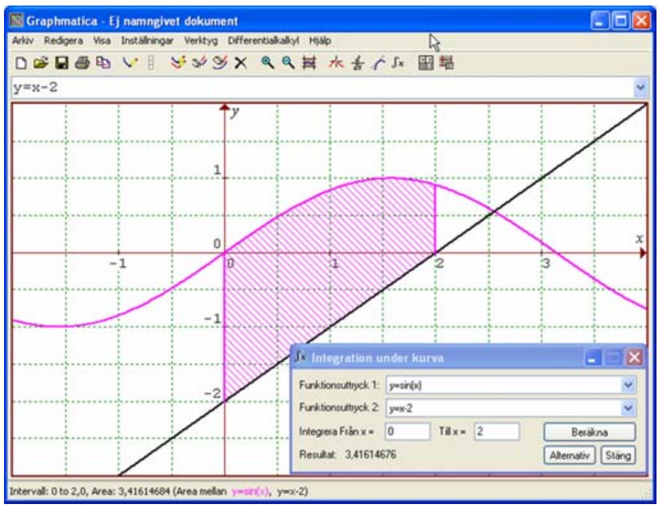
Lös ekvationen $e^x = x + 3$.

Figur 5: Graphmatica löser enkelt ekvationen $\cos(x) = x$.

Integraler

Graphmatica beräknar alla integraler numeriskt och kan beräkna arean under kurvan till alla funktioner som går att rita upp. Välj **Integrera** under menyalternativet **Differentialkalkyl**. Markören kommer att ändras till ett kors. Positionera därefter markören vid den vänstra punkten i integrationsintervallet, håll nere vänster musknapp och drag markören längs *x*-axeln till slutet på integrationsintervallet och släpp markören. Du beräknar arean mellan två kurvor genom att placera markören först på ena kurvan därefter på den andra. Vid integration kommer det fram ett litet fönster, där du kan ange mer exakta värden eller definiera funktionerna på annat sätt.

Exempel 1: Mata in funktionerna $y = \sin(x)$ och $y = x - 2$ och beräkna arean mellan dessa två kurvor i intervallet [0, 2]. Med Simpsons metod ger Graphmatica ett bra resultat. Se figur 6.



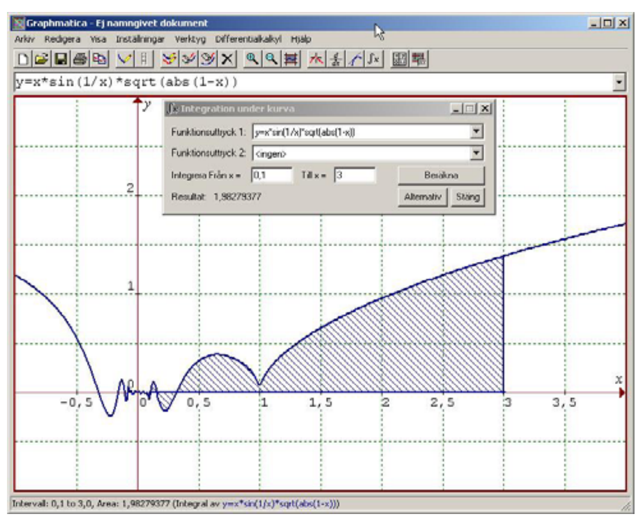
Figur 6: Integration mellan två kurvor i Graphmatica.

Genom att välja menyalternativet **Inställning – Integration mm** så kan du bestämma hur arean skall beräknas, det vill säga vilken integrationsmetod du vill ha. Där finns flera olika integrationsmetoder, men du kan också bestämma noggrannhet och inmatningsmetod. Integralen nedan är beräknad med Simpsons metod (10 000 segment) och reglerat antal decimaler under **Inställning – Integration mm – PunktTabell.**

Exempel 2: Beräkna

$$\int_{0.1}^{3} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \sqrt{|1-x|}\ dx\ .$$

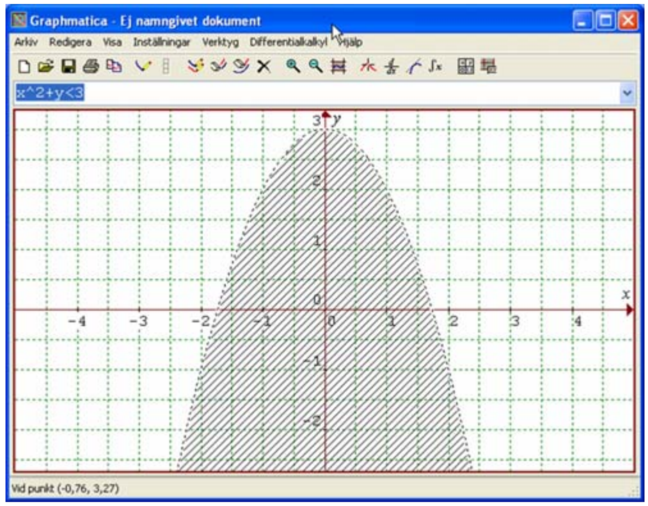
Graphmaticas resultat vid beräkning av den här svåra integralen är korrekt till 6 decimaler. Utökat antal decimaler och ökat antal segment ger ökad noggrannhet. Se figur 7.



Figur 7: Graphmatica klarar även besvärliga integraler!

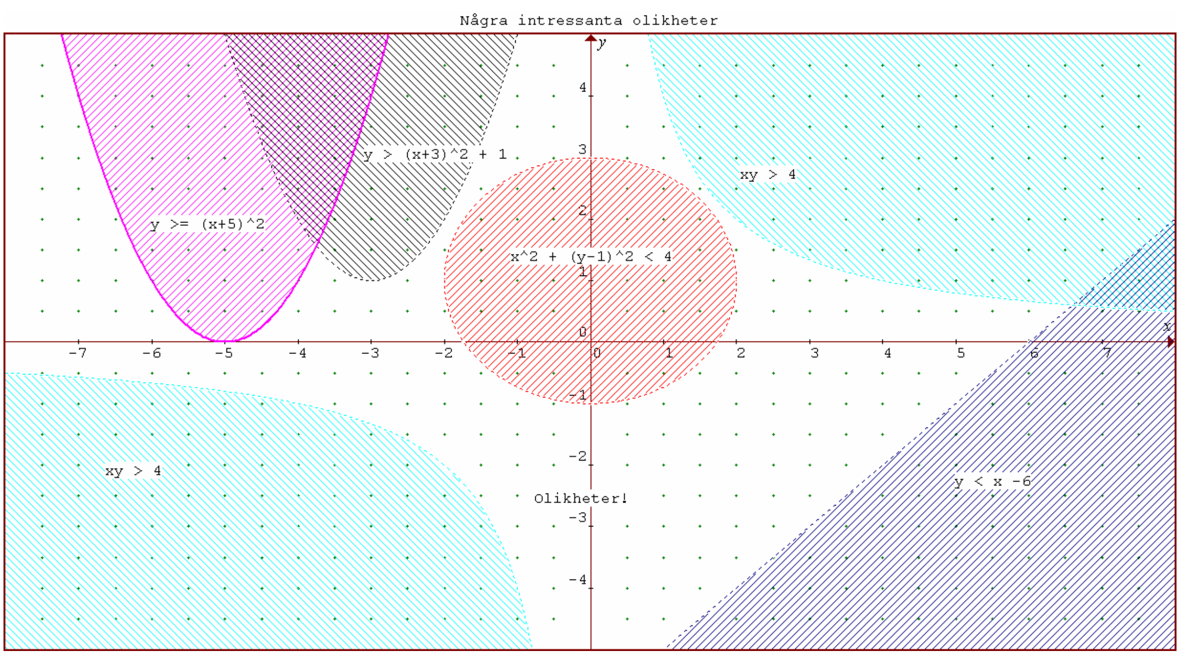
Olikheter

Graphmatica klarar också av att rita olikheter utan omskrivning. Låt oss anta att vi vill se hur olikheten $x^2 + y < 3$ ser ut. Vi skriver in detta uttryck precis som det ser ut och Graphmatica levererar följande – se figur 8.



Figur 8: Graphmatica illustrerar olikheten $x^2 + y < 3$.

Det går naturligtvis också att visualisera många olikheter samtidigt, vilket framgår av figur 9. Du kan pröva att skriva in kommentarer eller etiketter i ditt Grafdokument genom att använda verktyget **Kommentarer** under **Redigera**.



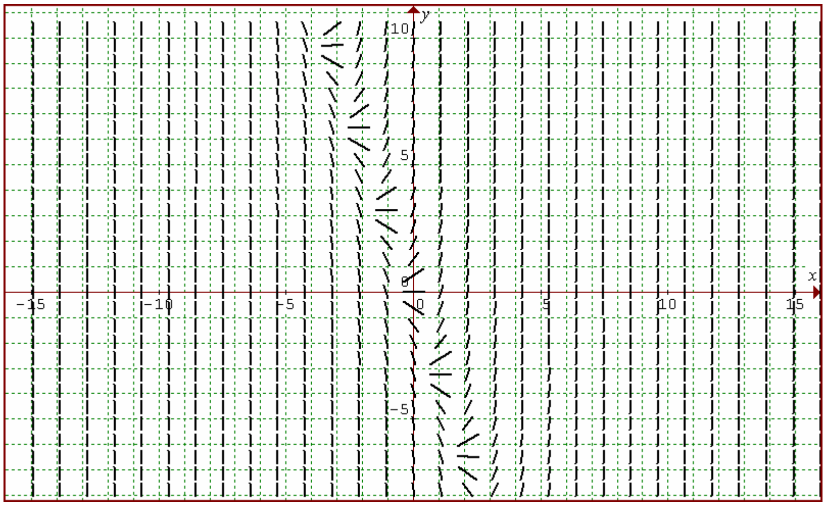
Figur 9: Graphmatica illustrerar 6 olikheter med etiketter.

Differentialekvationer

Ordinära differentialekvationer är viktiga i kurs E. ODE av första ordningen $y' = f(x, y)$ har en enkel geometrisk tolkning. Om vi väljer en godtycklig punkt (x, y), så kan vi bestämma lutningen av en tangent genom denna punkt om vi ritar f med y beroende av x.

Via likheten $y' = f(x, y)$ associerar därmed funktionen $f(x, y)$ en riktning till varje punkt i xy-planet. Genom att markera riktningen med en liten pil får vi det så kallade riktningsfältet. Ett riktningsfält är därmed representationen av lutningen hos alla lösningar till en specifik differentialekvation.

Exempelvis, så är det möjligt att rita lösningsfältet för differentialekvationen $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = 3t + y$ genom att mata in $\mathrm{d}y = 3x + y$ i Graphmatica. Programmet ritar riktningsfältet i figur 10.

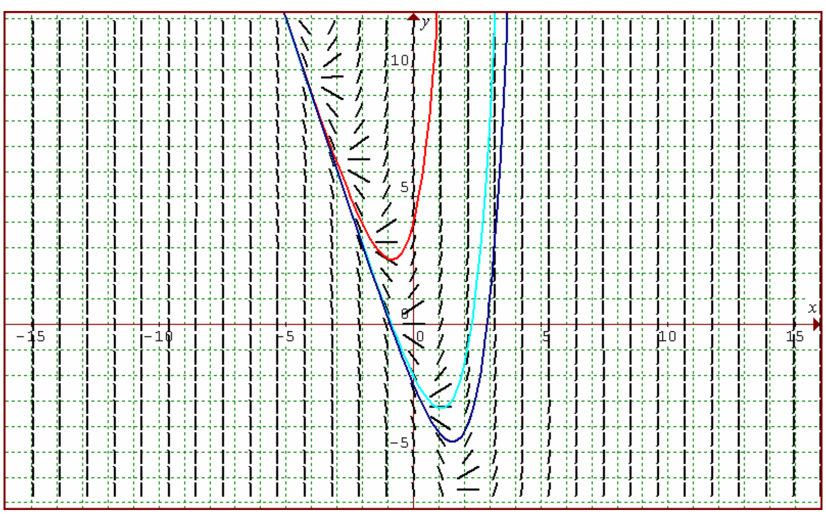


Figur 10: Graphmatica visar riktningsfältet till $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = 3t + y$.

Nu kan vi också rita in specifika lösningar över detta riktningsfält genom att specificera initiala lösningar. Vi kan ange att $\{t = 0, y = 4\}$, $\{t = 0, y = -2\}$ och $\{t = 3, y = 1\}$ genom skrivsättet

$\mathrm{d}y = 3x + y\ \{0, 4\}$ $\mathrm{d}y = 3x + y\ \{0, -2\}$ $\mathrm{d}y = 3x + y\ \{3, 1\}$

i Graphmatica och vi får resultatet i figur 11.



Figur 11: Graphmatica visar 3 specifika lösningar till $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = 3t + y$ över riktningsfältet.

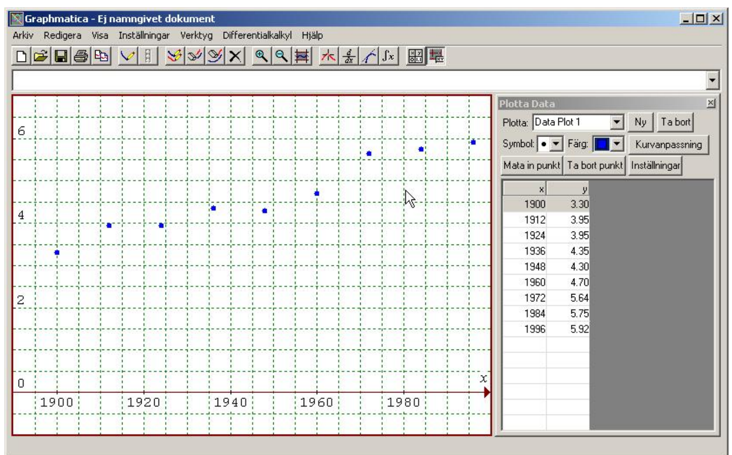
Matematiska modeller och Kurvanpassning

Inom många vetenskaper önskar man ofta studera samband mellan olika storheter på grundval av en insamlad datamängd. Genom att konstruera en matematisk modell som beskriver samband mellan data i en mätserie, vill man få en möjlighet att försöka förutse vad som skulle kunna gälla för ytterligare data inom samma orsakssammanhang. Idrottsresultat förändras över tid, det är ett välkänt faktum. Låt oss studera hur höjden för stavhoppet hos den manlige guldmedaljören i Olympiska spel har förändrats över tid. I tabell 1 finner vi höjden på det vinnande stavhoppet för olympiska spel från 1900 och fram till våra dagar.

Tabell 1: Utvecklingen av stavhopp vid Olympiska spel.

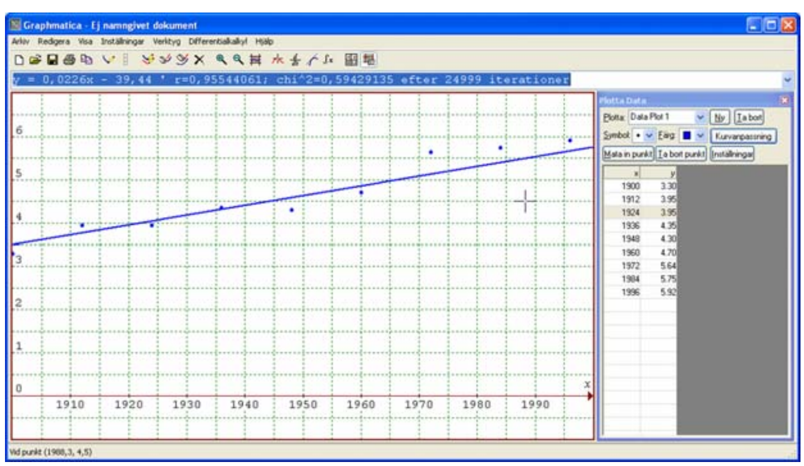
År	1900	1912	1924	1936	1948	1960	1972	1984	1996
Höjd (m)	3,30	3,95	3,95	4,35	4,30	4,70	5,64	5,75	5,92

Låt oss nu mata in dessa värden i Graphmatica via menyalternativet Visa – Data Plot Editor. Du får säkert justera ditt koordinatsystem för att kunna se punkterna. Se figur 12.



Figur 12: Graphmatica visar punkter som representerar det vinnande stavhoppet höjd i 9 Olympiska spel.

Nu kan vi anpassa en kurva genom den här punktmängden, en kurva som kan sägas utgöra en matematisk modell över den här situationen. Den skall helst vara så bra att den kan förutsäga höjden på det vinnande stavhoppet vid olympiaden 2008. Låt oss börja med en linje. Klicka på knappen Inställningar och välj ett polynom av grad 1. Du bör få samma resultat som i figur 13.



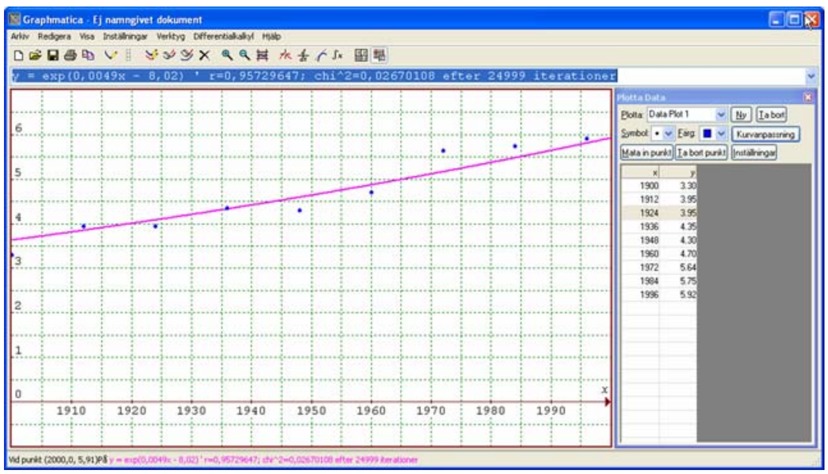
Figur 13: Graphmatica tar fram en linjär anpassning till de 9 punkterna.

Observera att korrelationskoefficienten r = 0,955 vilket indikerar att linjen $y = 0{,}0266x - 39{,}44$ stämmer ganska bra med punktmängden. Men vi ser samtidigt att modellen skulle förutsäga alldeles för låga resultat för senare tiders Olympiader inom ramen för vår datamängd.

Vi kan testa vår matematiska modell *Höjd* = 0,0266·*År* – 39,44 och se vilken höjd den ger för sommarolympiaden 2008. Vi gör det genom att använda **Verktyget Beräkna** som du också når genom Crtl+E. Skriver du in 2008 på raden **Lös för y**, så ger Graphmatica resultatet 5,94 meter. Om vi testar med år 2044 så ger vår modell resultatet 6,75 vilket förefaller lite orealistiskt.

Steve Hooker från Australien tog guld i stavhopp vid Peking-OS 2008 på 5, 90 meter men när guldet var klart så begärde Hooker upp ribban på olympiska rekordhöjden 5,96 – och klarade i tredje försöket. Så vår modell är relativt bra fram till och med 2008.

Om vi högerklickar på vår linjära kurvanpssning, så kan vi ta bort den och istället testa en exponentiell modell. Den har ännu bättre korrelationskoefficient och förefaller utgöra underlag för en bättre matematisk modell över stavhoppets utveckling. Se figur 14.



Figur 14: Här har Graphmatica tagit fram en exponentiell anpassning till de 9 punkterna.

Men skenet bedrar, för om vi trycker Ctrl+E eller väljer verktyget Beräkna, så ser vi att den här kurvanpassningen ger 6,16 meter för OS 2008 och spårar ut helt för den vinnande höjden vid OS 2044! Så vår linjära kurvanpassning tycks trots allt vara bäst av de kurvanpassningar som står till buds.

Även ett mer fullvuxet kurvanpassningsprogram som CurveExpert går bet på den här datamängden om man inte styr upp kurvanpassningen ganska hårt. CurveExpert levererar uttrycket $f(x) = a \cdot x^{b/x}$. Här är a = 2622301,5 och b =-3409,2476. Men även med denna kurvanpassning får vi sämre resultat för 2008 och 2044.

Det är viktigt att man alltid validerar den matematiska modell man har tagit fram gentemot kända resultat utanför domänen. Vad vi kan säga om den linjära modell som Graphmatica räknade fram till oss, är att den tycks gälla relativt bra inom tidsperioden 1900 – 2008. Innan och efter den tidsperioden blir modellen högst osäker, exempelvis skulle stavhopparna runt 1744 enbart ha hoppat 0 meter högt. Det faktum att en matematisk modell enbart gäller inom en viss domän är sant för många matematiska modeller.

Newtons avsvalningsmodell

Ett exempel på första ordningens differentialekvation är Newtons avsvalningsekvation som kan modellera avsvalning exempelvis en byggnad till vilken ingen värme tillförs eller av ett objekt stående i en konstant temperatur. Ekvationen kan skrivas:

$$\frac{dT}{dt} = c(T_0 - T)$$

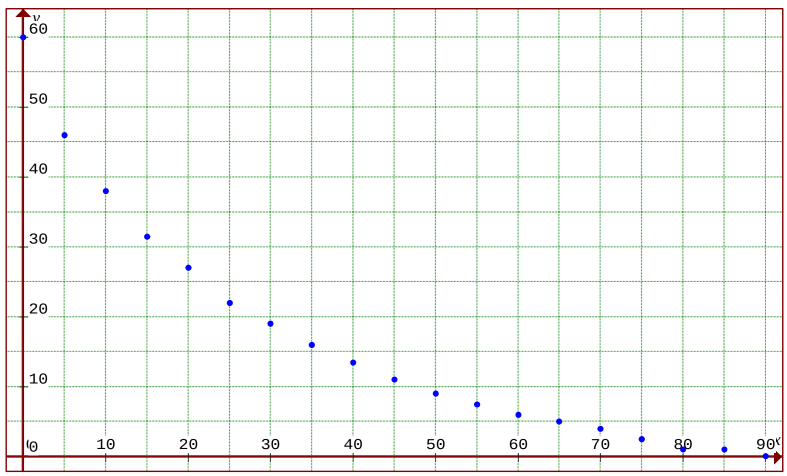
Här representeras föremålets temperatur av parametern T, och uppvärmningen/avsvalningen av temperaturderivatan dT/dt (med dimensionen grader per tidsenhet). Omgivningstemperaturen representeras av T_0. Konstanten c har dimensionen (1/tidsenhet).

Vi skall studera ett klassiskt exempel, en serie av fiktiva mätvärden som vi låtsas är uppmätta för en kopp med 60-gradigt kaffe som ställs utomhus. Utetemperaturen är 0 grader Celsius.

Tabell 2: Avsvalnande kaffe

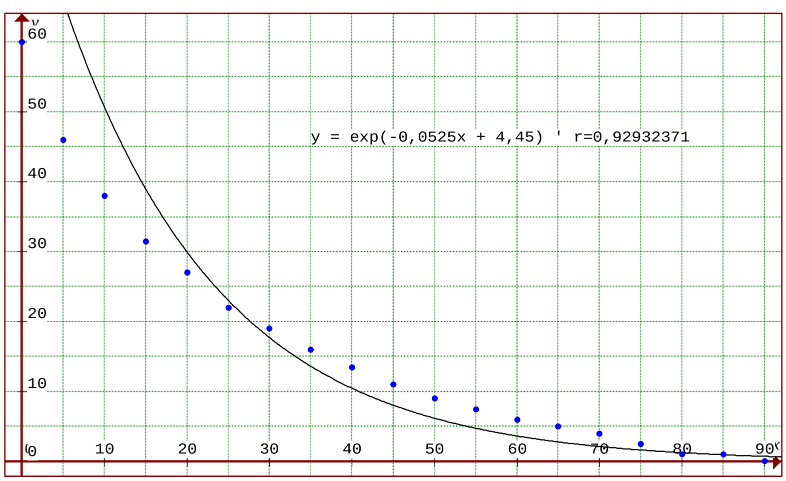
Tid(minuter	Grader (Celsius)
0	60
5	46
10	38
15	31,5
20	27
25	22
30	19
35	16
40	13,5
45	11
50	9
55	7,5
60	6
65	5
70	4
75	2,5
80	1
85	1
90	0,1

Denna datamängd ser ut på följande sätt om vi matar in den i Graphmatica – se figur 15:



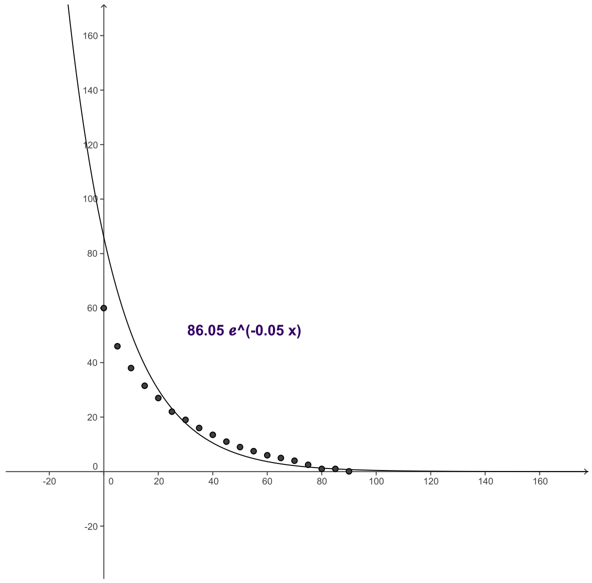
Figur 15: Graphmatica visar punkter som representerar avsvalnande kaffe.

Vi väljer en exponentiell anpassning och begär kurvanpassning – se figur 16:

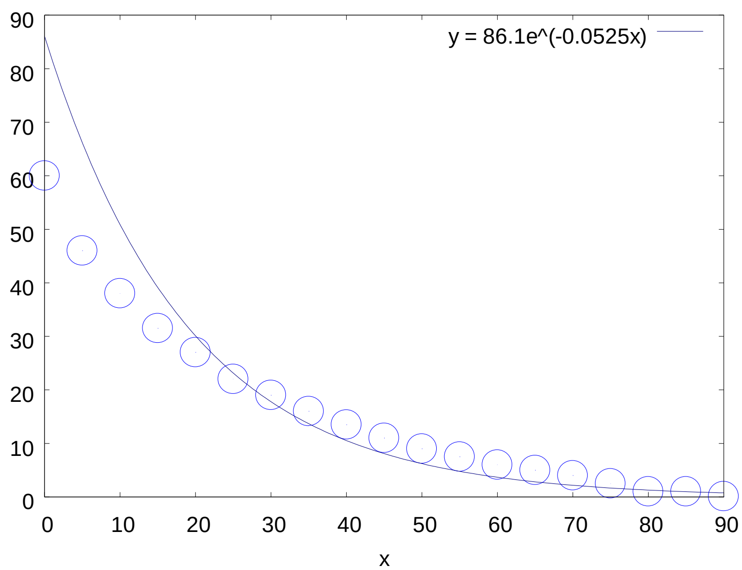


Figur 16: Graphmatica visar punkter och exponentiell regressionslinje.

Hur bra är egentligen denna anpassning? Räknar Graphmatica korrekt? Vi låter GeoGebra (www.geogebra.org) och Maxima(http://www.moglestu.vgs.no/maxima/) ta fram en regressionslinje för samma datamängd.



Figur 17: GeoGebra ger den exponentiella regressionslinjen $f(x) = 86{,}05 \cdot e^{-0{,}05x}$.



Figur 18: Maxima ger också den exponentiella regressionslinjen $f(x) = 86{,}05 \cdot e^{-0{,}05x}$.

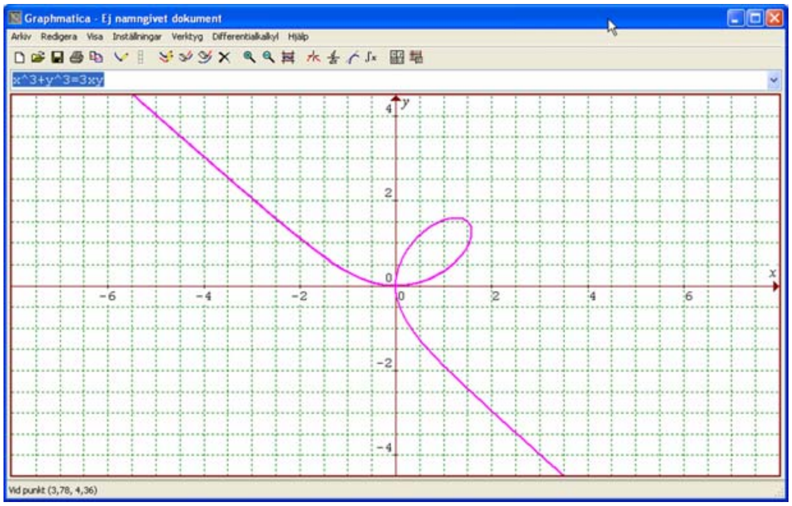
Skillnaderna ovan mellan resultaten från GeoGebra och Maxima beror enbart på antalet decimaler vi har inställt och eftersom vi kan skriva om Graphmaticas resultat enligt

$$\mathrm{f(x)} = e^{(-0{,}0525x+4{,}45)} = e^{4{,}45} \cdot e^{(-0{,}0525x)} = 86 \cdot e^{(-0{,}0525x)}$$

så ser vi att de tre programmen levererar samma resultat.

Kurvritning

Det är lätt att hitta datorprogram som ritar kurvor av enkla funktionsuttryck, som deriverar och integrerar. Det är till och med ganska lätt att hitta program som kan rita riktningsfält till ordinära differentialekvationer. Men det är ganska svårt att hitta datorprogram som kan rita kurvor till funktionsuttryck av typen $x^3 + y^3 = 3xy$. Men det klarar Graphmatica. Skriv bara in uttrycket x^3+y^3=3xy i kommandoraden och du bör få samma resultat som i figur 19, frånsett färger och inställning av koordinatsystemet.



Figur 19: Graphmatica ritar grafen till $x^3 + y^3 = 3xy$

Det innebär att Graphmatica kan användas till att undersöka alla möjliga kurvor på olika sätt. Men alla program klarar inte av att rita upp kurvan ovan, åtminstone inte i kartesiska koordinater. Det här problemet kan vi emellertid komma runt genom att undersöka så kallad parametrisk form. En parametrisk kurva i planet består av ett par av funktioner

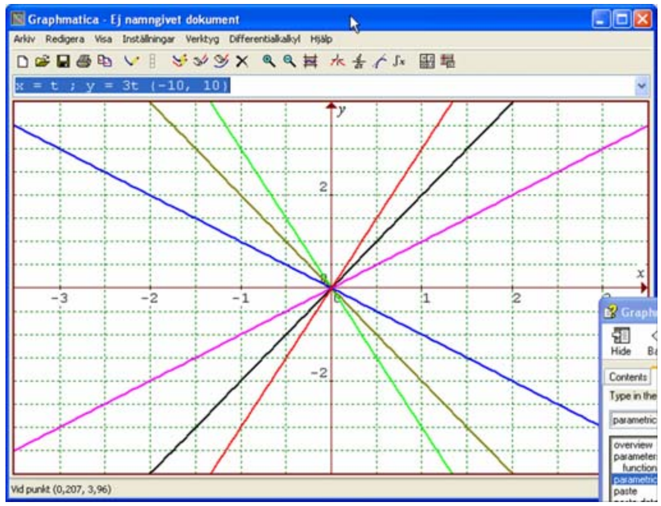
$$x = f(t)$$
$$y = g(t)$$

där de två funktionerna definierar ordnade par av (x, y). Dessa två ekvationer kallas för parameterframställning av en kurva, eller för kurvans definition på parameterform. Kurvans utsträckning beror på hur t är definierad och i allmänhet måste man definiera t för att kunna rita en kurva på parameterform. I många tillämpningar så kan vi tänka oss att x and y ”varierar med tiden t” eller att t beskriver en rotationsvinkel som en kurva rör sig utefter.

Det är ofta fördelaktigt att ta en relativt komplicerad ekvation beskrivande ett samband i rektangulära koordinater och skriva om detta i parametrisk form. En cirkel med radie r och medelpunkt (x_0, y_0) har ekvationen $x = x_0 + r \cdot cos\ t$, $y = y_0 + r \cdot sin$, $0 \le t \le 2\pi$. Hela cirkeln kan inte beskrivas med en ekvation av formen $y = f(x)$ eftersom två olika y-värden hör till varje x då x tillhör det öppna intervallet $(x_0 - r, x_0 + r)$. Däremot kan exempelvis den övre halvcirkeln beskrivas av en sådan ekvation.

Många kurvor är inte funktionskurvor och ett sätt att beskriva dem är på parameterform. Det kan vara naturligt även av andra skäl. Kanske är t en tidpunkt och (x, y) koordinaterna för den position en partikel befinner sig i vid tidpunkten t. Även om kurvan är en funktionskurva ger parameterformen då mer information om partikelns rörelse än motsvarande ekvation på formen $y = f(x)$. Den senare ger ju bara information om det spår partikeln lämnat. Jag skall här försöka visa på det underliggande och grundläggande samband som finns mellan kurvor i rektangulär och parametrisk form.

Exempel 1: Vi börjar med uttrycket $x = t + a$, $y = kt + b$ och får genom att sätta $a = 0$, $b = 0$, $k = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ och $t = \{-10, 10\}$ följande figur i Graphmatica. Observera kurvskaran i figur 16 med varje linje passerande genom (0,0) där k är identisk med lutningen hos respektive linje.



Figur 20: Parametrisk kurvskara

Det kanske alltid är så att $k = m$? Vi testar detta genom att sätta $a = 2$, $b = 2$. Återigen får vi en kurvskara där k är lutningen och som går genom (2, 2). Vi går vidare och låter k vara oförändrad men ändrar a och b. Vi sätter exempelvis $a = 2$ och $b = -3$. Resultatet är en liknande kurvskara som i figur 1, men genom (2, -3). Slutsatsen blir att $m = k$ och (a, b) är en punkt på linjen. Vi generaliserar detta till följande algebraiska samband.

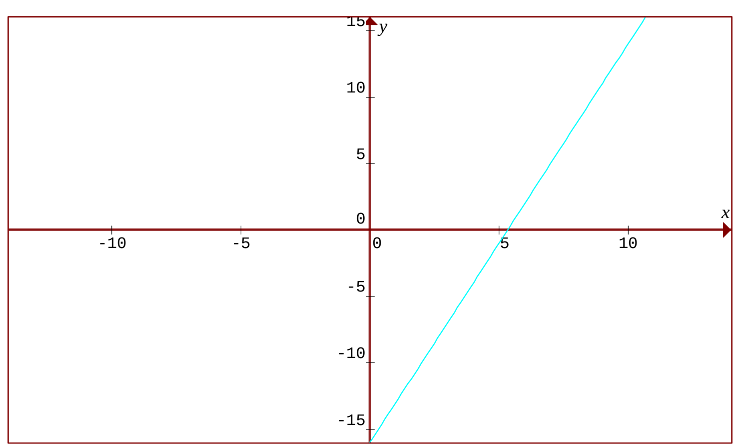
Utgå ifrån den parametriska formen $x = t + a$ och $y = kt + b$, och den rektangulära formen $y = mx + c$ och substituera enligt:

$(kt + b) = k(t + a) + c$ $\qquad$ $kt + b = kt + ka + c$ $\qquad$ $b = ka + c$ $\qquad$ $b - ka = c$

Sålunda är (a, b) en punkt på linjen, k är linjens lutning, och $b - ka$ är skärningspunkten med y-axeln.

Exempel: Skriv en parametrisk ekvation för linjen genom (7, 5) med lutning 3. Skissa grafen till kurvan.

Lösning: Vi har att $(a, b) = (7, 5)$ är en punkt på linjen och att $k = 3$. Den parametriska ekvationen blir $x = t + 7$ och $y = 3t + 5$. Se figur 21.



Figur 21: Parametrisk kurva

Observera att den parametriska ekvationen ovan inte är den enda som uppfyller villkoret. Exempelvis så ger parameterframställningen $x = t + 1$ och $y = 3t - 13$ samma linje.

Det innebär att formen $x = t + a$, $y = kt + b$ inte ger en entydig lösning.

Men det kan vi rätta till. Eftersom $b - ka = c$ och c representerar skärningen med y-axeln i rektangulär form, sätt $(a, b) = (0, c) = (0, b - ka)$.

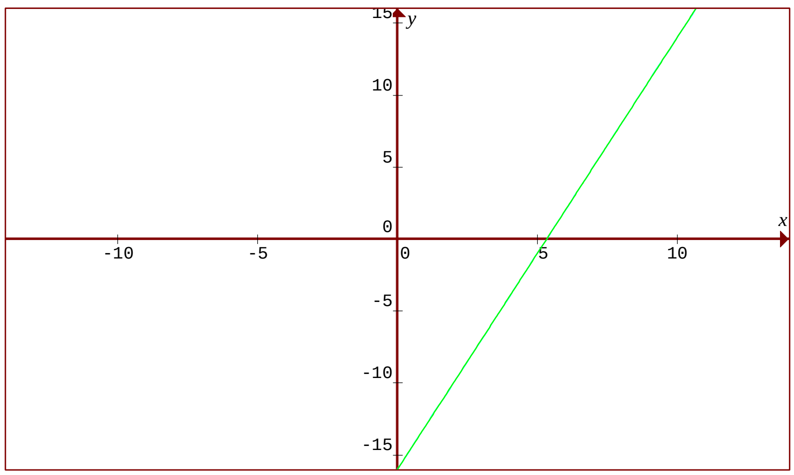
Det ger den mer generella framställningen $x = t$, $y = 3t - 16$.

Här är $x = t$, och $y = kt + c$ där k är lutningen och c skärningen med y-axeln.

Exempel: Skriv linjens ekvation i rektangulär form.

Lösning: $(a, \mathrm{b}) = (7, 5)$, $m = 3$, $c = b - ka = 5 – 3\ (7) = -16$

Vi får: $y = 3x – 16$. Se figur 22.



Figur 22: Samma kurva i kartesiska koordinater

Trigonometrisk tillämpning

En cirkel kan också uttryckas på parametrisk form. Vi vet att $x = r \cdot \cos \Theta$, $y = r \cdot \sin \Theta$, $0 \leq \Theta < 2\pi$ representerar cirkeln $x^2 + y^2 = r^2$, där Θ kallas parameter och punkten P $(r \cdot \cos \Theta, r \cdot \sin \Theta)$ kallas punkten "Θ" på cirkeln $x^2 + y^2 = r^2$. I den ”vanliga” enhetscirkeln är $r = 1$.

Men alla cirklar har inte centrum i origo. Så hur skriver vi cirkeln $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ på parametrisk form?

Varje punkt på cirkelperiferin kan representeras av

$$x = h + r \cdot \cos \Theta, \ \ y = k + r \cdot \sin \Theta, \ \ 0 \leq \Theta < 2\pi$$

Därigenom blir $x = h + r \cdot \cos \Theta$, $y = k + r \cdot \sin \Theta$, $0 \leq \Theta < 2\pi$ representationen av cirkeln

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

Precis som tidigare så kallas Θ för parameter och punkten $((h + r) \cdot \cos \Theta, (k + r) \cdot \sin \Theta)$ kallas punkten "Θ" på denna cirkel.

Exempel:

Bestäm den parametriska ekvationen för cirkeln $x^2 + y^2 = 5$

Lösning: Den givna cirkeln är $x^2 + y^2 = 5$. Vi vet att parameterframställningen av cirkeln $x^2 + y^2 = r^2$ är $x = r \cdot \cos \Theta$, $y = r \cdot \sin \Theta$, $0 \leq \Theta \leq 2\pi$.

Vi identifierar att $r = \sqrt{5}$. Det ger att parameterframställningen av $x^2 + y^2 = 5$ är

$x = \sqrt{5} \cdot \cos\Theta$, $y = \sqrt{5} \cdot \sin\Theta$, $0 \leq \Theta \leq 2\pi$.

Exempel:

Bestäm den kartesiska ekvationen för kurvorna $x = p + c \cdot \cos \Theta$, $y = q + c \cdot \sin \Theta$, där Θ är parameter. Representerar detta uttryck en cirkel? Bestäm i så fall centrum och radie.

Lösning:

Vi har att $x = p + c \cdot \cos \Theta$, $y = q + c \cdot \sin \Theta \Rightarrow x - p = c \cdot \cos \Theta$, $y - q = c \cdot \sin \Theta$
För att eliminera parametern Θ, så kvadrerar vi och adderar på ett lämpligt sätt och får

$(x - p)^2 + (y - q)^2 = c^2 \cdot (\cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta)$ (trigonometriska ettan) $\Rightarrow (x - p)^2 + (y - q)^2 = c^2$, vilket representerar en cirkel med centrum i (p, q) och radie $= |c|$.

Analytisk framställning

Vi kan också använda verktyget derivering, för att skissa en kurva i parameterform. Denna metod är speciellt användbar när vi har mer komplicerade uttryck, som inte omedelbart låter sig översättas till exempelvis räta linjer eller cirklar.

Exempel: Skissera kurvan $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in R$

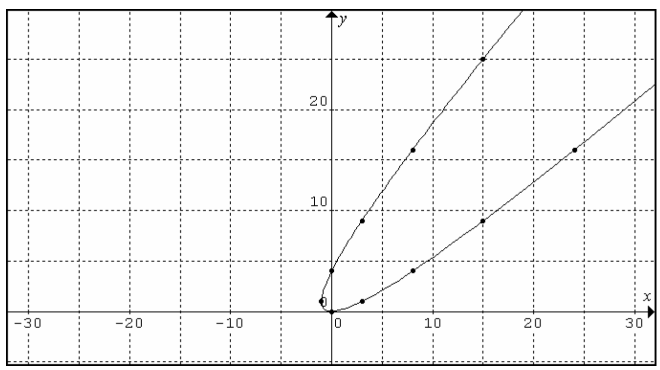
Lösning: Vi undersöker *x* och *y* var för sig och skaffar oss en uppfattning om när *x* och *y* är växande eller avtagande funktioner av *t*. Precis som när vi analyserar samma egenskap hos vanliga funktioner *f*(*x*) är derivering ett utmärkt verktyg för detta. Vi får:

$$\frac{dx}{dt} = 2t + 2, \ \frac{dy}{dt} = 2t$$

Vi ser att *x* är avtagande för $t \le -1$ och växande för $t \ge -1$, samt att *y*-koordinaten är växande för alla $t \ge 0$. Vi kan därigenom skissa en kurva, men innan vi gör det kompletterar vi med en värdetabell (Tabell 3). Vi får följande värden och skiss (med hjälp av Graphmatica). Se figur 23:

Tabell 3: Värdetabell för parametrisk kurva

t	x	*y*
-5	15	25
-4	8	16
-3	3	9
-2	0	4
-1	-1	1
0	0	0
1	3	1
2	8	4
3	15	9
4	24	16
5	35	25

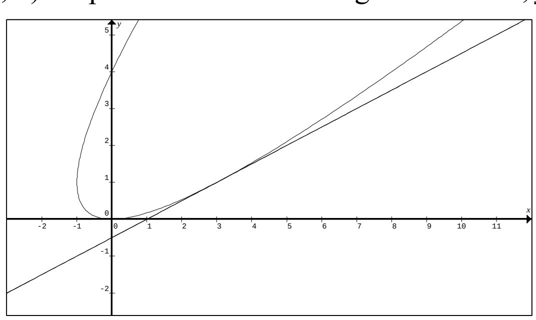


Figur 23: Parametrisk kurva plottad i Graphmatica

Vi kan också använda derivering för att bestämma en tangent till kurvan i en viss punkt. Det gör vi genom att analysera varje uttryck för sig enligt följande exempel: Bestäm en tangent till kurvan i punkten (3, 1).

Lösning: Vi har sedan tidigare tagit fram att $\frac{dx}{dt} = 2t + 2, \ \frac{dy}{dt} = 2t$.

I punkten $(x, y) = (3, 1)$ är $t = 1$. Det ger att riktningsändringen i *x*-led = 4 och i *y*-led = 2. Tangenten i punkten (3, 1) får parameterframställningen $x = 3 + 4t$, $y = 1 + 2t$. Se figur 24.



Figur 24: Kurva och tangent plottad i Graphmatica

Nu har vi en tangentlinje, en rät linje, beskriven i parameterform, och vi kan använda metoden från första delen av detta kapitel för att transformera tangentlinjens ekvation till kartesiska koordinater. Men som en beskrivning av hur olika delar av matematiken hänger ihop och samspelar, skall vi gå en annan väg med hjälp av kedjeregeln. Till detta behöver vi definiera ett samband, en sats:

Sats. Låt **C** vara en kurva med parameterframställningen $x = x(t)$ och $y = y(t)$ vilka är differentierbara funktioner. Om det existerar en differentierbar funktion f sådan att $y(t) = f(x(t))$ för t i något öppet intervall, så gäller att

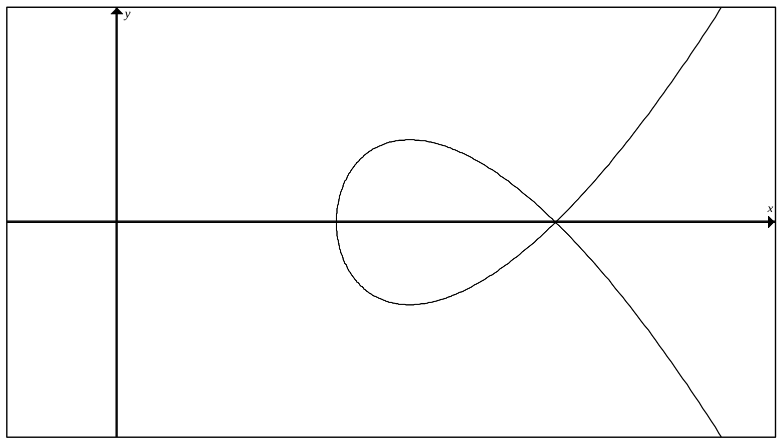
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

Exempel: Betrakta kurvan

$$x = t^2 + 1,\ y = t^3 - t,\ -2 \le t \le 2$$

Se figur 25.

Vi får att
$$\frac{dx}{dt} = 2t$$
$$\frac{dy}{dt} = 3t^2 - 1$$



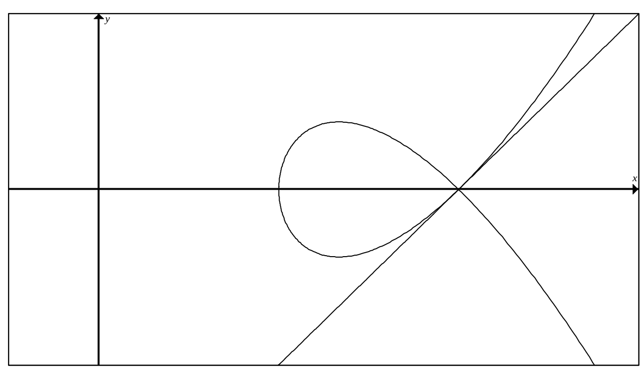
Figur 25: Parametrisk kurva plottad i Graphmatica.

Vi ser att $dx/dt < 0$ för $t < 0$ och att $dx/dt > 0$ för $t > 0$. Det innebär att x är avtagande för $t < 0$ och växande för $t > 0$. På samma sätt är $dy/dt > 0$ när $|t| > 1/\sqrt{(3)}$ och $dy/dt < 0$ för $|t| < 1/\sqrt{(3)}$. Alltså är y växande när $|t| > 1/\sqrt{(3)}$ och avtagande när $|t| < 1/\sqrt{(3)}$.

Tangentens lutning i t = 1 är

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 - 1}{2t} = \frac{2}{2} = 1$$

När $t = 1$ är $(x, y) = (2, 0)$. Tangentlinjens ekvation blir då $y - 0 = 1(x - 2)$, det vill säga $y = x - 2$. Se figur 26.

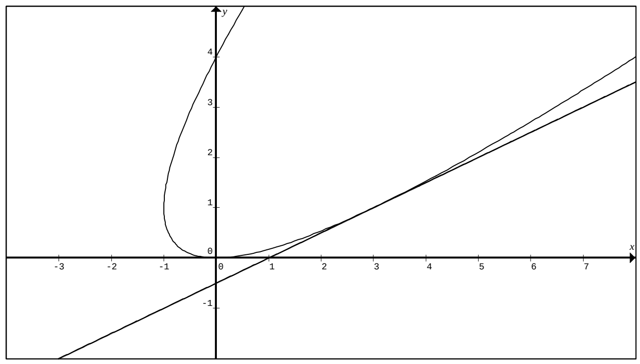


Figur 26: Parametrisk kurva och tangent.

På samma sätt blir vår tangentlinje till kurvan $x = t^2 + 2t$, $y = t^2$ i punkten (3, 1) översatt till kartesiska koordinater på följande vis.

Vi har att $dx/dt = 2t + 2$ och att $dy/dt = 2t$ vilket ger kvoten ($t = 1$) $(dy/dt) / (dx/dt) = 2/4 = 1/2$.

Tangentlinjens ekvation blir följaktligen
$y - 1 = 1/2(x - 3)$, det vill säga $y = 0{,}5x - 0{,}5$. Se figur 27.



Figur 27: Parametrisk kurva och tangent i kartesiska koordinater.

Man kan också transformera mer komplexa uttryck från kartesiska koordinater till parameterform för att kunna rita dem. Betrakta exempelvis det inledande exemplet

$$x^3 + y^3 = 3xy \qquad (1)$$

Som jag redan har hävdat, så är denna typ av ekvation svår att avbilda i kurvform utom för sofistikerade datorprogram, men om vi skriver om den på parameterform får vi ett uttryck som är lätt att rita för många olika datorprogram, inklusive för grafiska miniräknare. Låt oss substituera $y = tx$ i (1) så att vi får

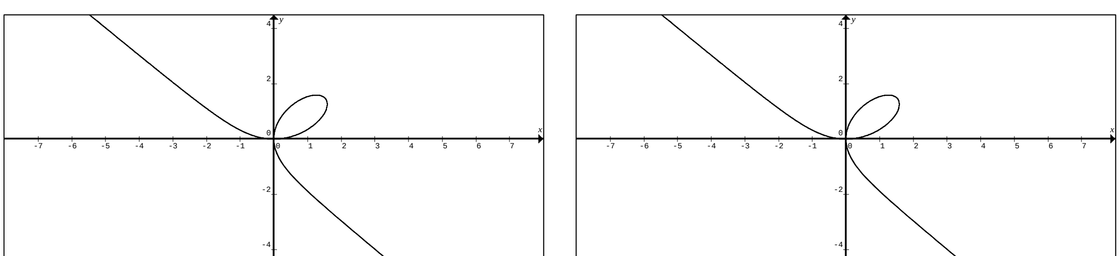
$$x^3 + tx^3 = 3tx^2$$

$$x^3(1 + t^3) = 3tx^2$$

$$x(1 + t^3) = 3t$$

$$x = \frac{3t}{1+t^3};\ y = tx \Rightarrow y = \frac{3t^2}{1+t^3}$$

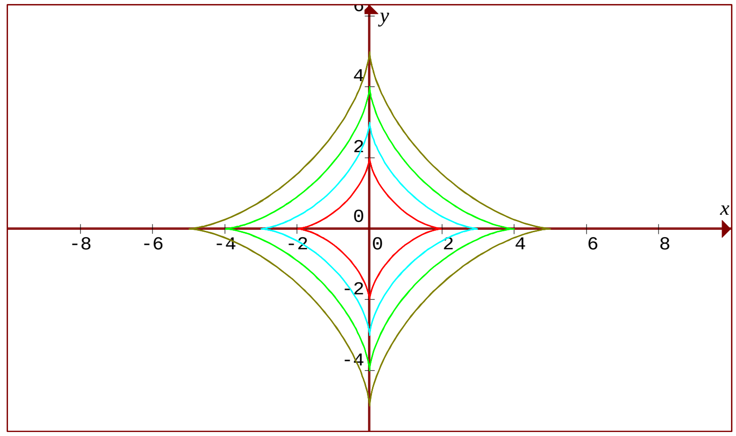
Nu kan vi rita kurvan definierad i (1) genom vår parametriska framställning och nedan syns den ritad i Graphmatica till vänster medan (1) är ritad i sin originalform med hjälp av Graphmatica i figuren till höger. Se figur 28 (a & b). Uppenbart är det precis samma kurva, men de flesta grafiska verktyg klarar inte av att rita denna kurva i orginalform. Parametrisk representation av kurvor möjliggör med andra ord att vi kan åskådliggöra visuell representation av kurvor betydligt lättare.



Figur 28 (a & b): Kurvan $x^3 + y^3 = 3xy$, ritad i parameterform till vänster och i kartesiska koordinater till höger.

Här nedan följer några mer eller mindre kända kurvor som kan uttryckas med hjälp av parameterframställning

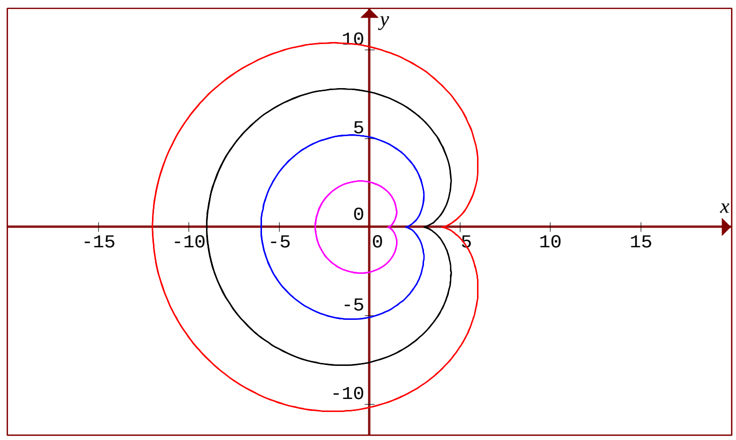
Asteroid:
$x = a \cdot \cos^3 t$
$y = a \cdot \sin^3 t$
för några olika heltalsvärden på *a*.



Figur 29: Asteroid ritad i Graphmatica.

Cardioid:

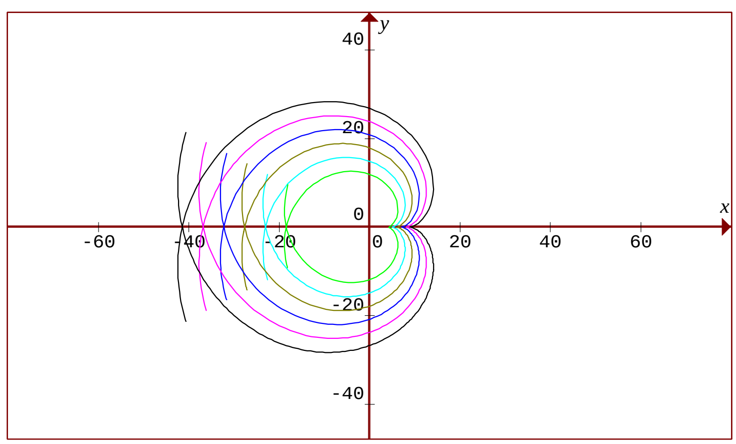
$x = a \cdot (2\cos(t) - \cos(2t))$;
$y = a \cdot (2\sin(t) - \sin(2t))$ för några olika heltalsvärden på *a*.



Figur 30: Cardioid ritad i Graphmatica.

Involute:

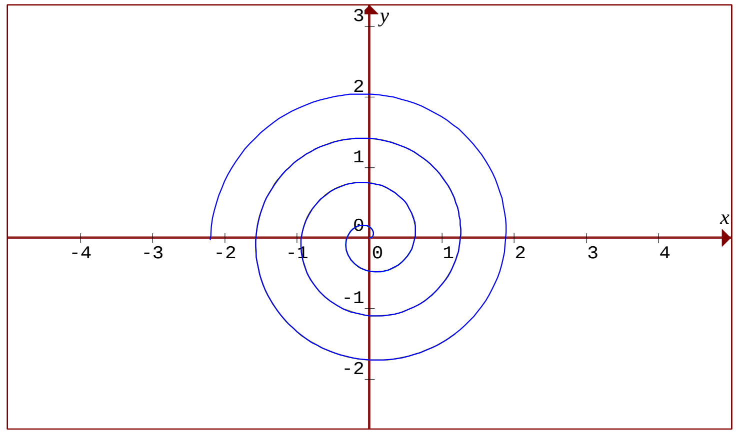
$x = a \cdot (\cos(t) + t \cdot \sin(t))$;
$y = a \cdot (\sin(t) - t \cdot \cos(t))$ för några olika heltalsvärden på *a*. Begränsa värdet på *t*.



Figur 31: Involute ritad i Graphmatica.

Spiral

$x = (t/10) \cdot \cos(t)$
$y = (t/10) \cdot \sin(t)$

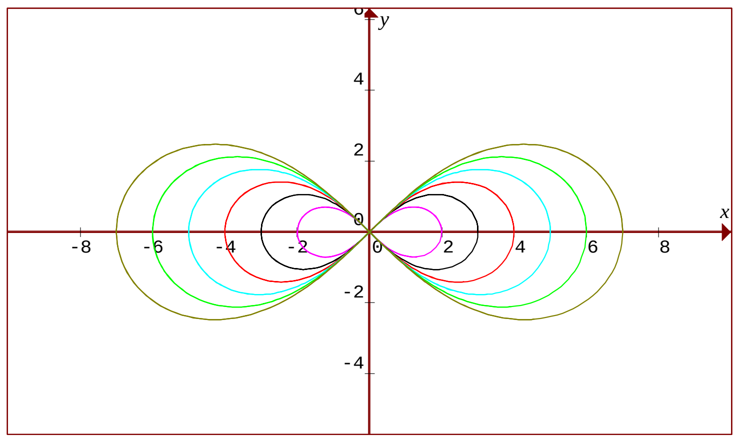


Figur 32: Spiral ritad i Graphmatica.

Bernoullis Lemniskata

$$x = \frac{a\cos t}{1+\sin^2 t}$$
$$y = \frac{a\sin t \cdot \cos t}{1+\sin^2 t}$$

för några olika heltalsvärden på a.

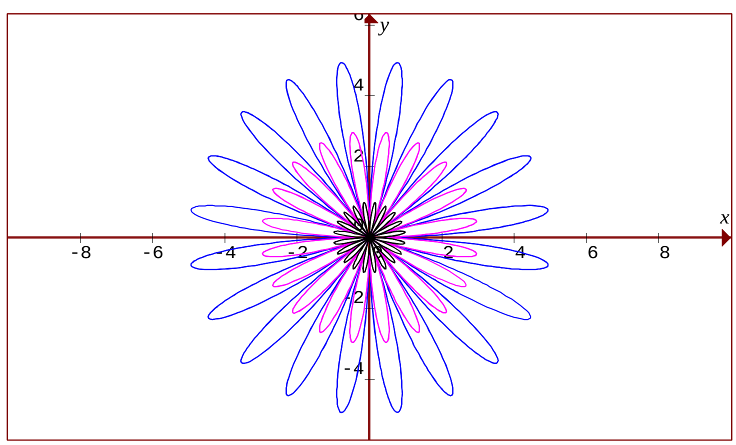


Figur 33: Bernoullis Lemniskata ritad i Graphmatica

Blombukett

$x = a \cdot \sin(10t) \cdot \cos(\mathrm{t})$
$y = a \cdot \sin(10t) \cdot \sin(t)$

för några olika heltalsvärden på a.



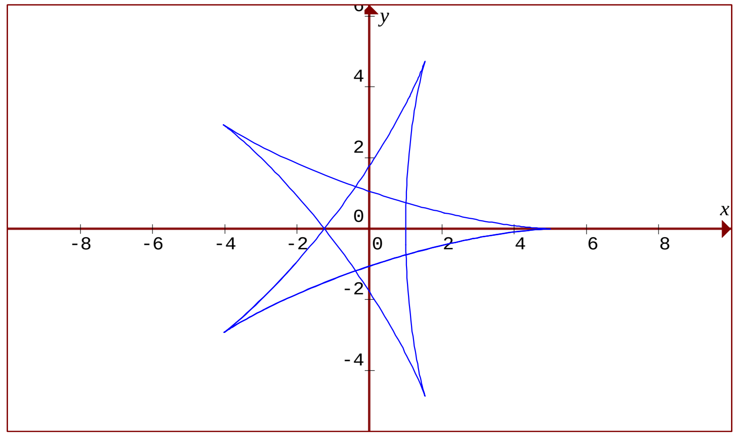
Figur 34: Blombukett ritad i Graphmatica

Stjärna

$x = (a - b)\cdot\cos(t) + b\cdot\cos((a/b\text{-}1)\cdot t)$
$y = (a - b)\cdot\sin(t) - b\cdot\sin((a/b - 1)\cdot t)$

Pröva med små heltalsvärden på *a* och *b*.

I figuren är $a = 5$ och $b = 3$.



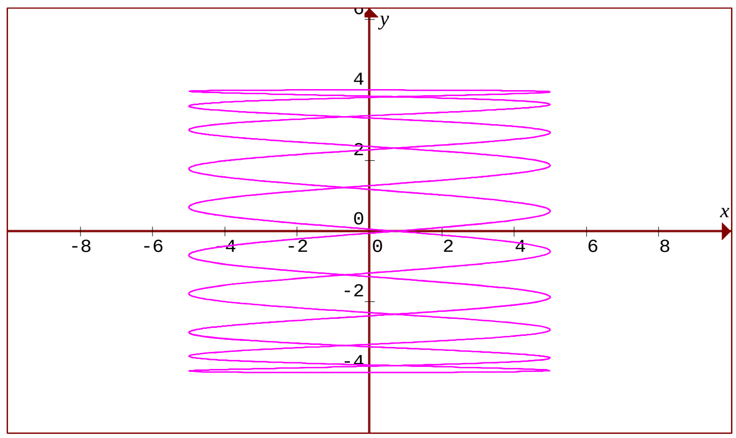
Figur 35: Stjärna ritad i Graphmatica

Lissajous figurer

$x = a \cdot \sin(nt + c)$
$y = b \cdot \sin(t)$

Pröva med små heltalsvärden på *a*, *b* och *c*. Antalet slingor styrs med *n*.

I figuren är $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$ och $n = 10$.



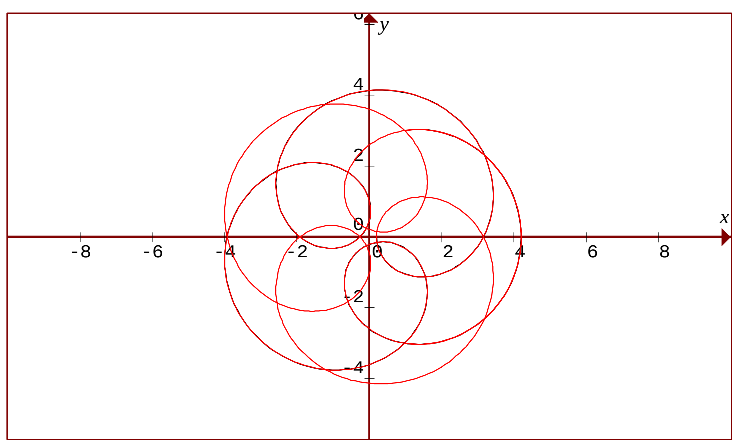
Figur 36: Lissajous figurer ritade i Graphmatica

Hypotrochoid

$x = (a - b)\cdot\cos(t) + c\cdot\cos((a/b - 1)t)$
$y = (a - b)\cdot\sin(t) - c\cdot\sin((a/b - 1)t)$

Pröva med små heltalsvärden på *a*, *b* och små värden på *c*.

I figuren är $a = 5$, $b = 7$, och $c = 2{,}2$.



Figur 37: Hypotrochoid ritad i Graphmatica

Samtliga figurer i denna korta introduktion är skapade med hjälp av Graphmatica. Du kan hitta mer information om varje uppritad kurva och om många andra kurvor via **Famous Curves Index** på adress

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Curves.html

Kontaktinformation

Professor Thomas Lingefjärd vid Göteborgs Universitet
Thomas.Lingefjard@ped.gu.se